LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 12

Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

Lekcije iz Matematike 2.

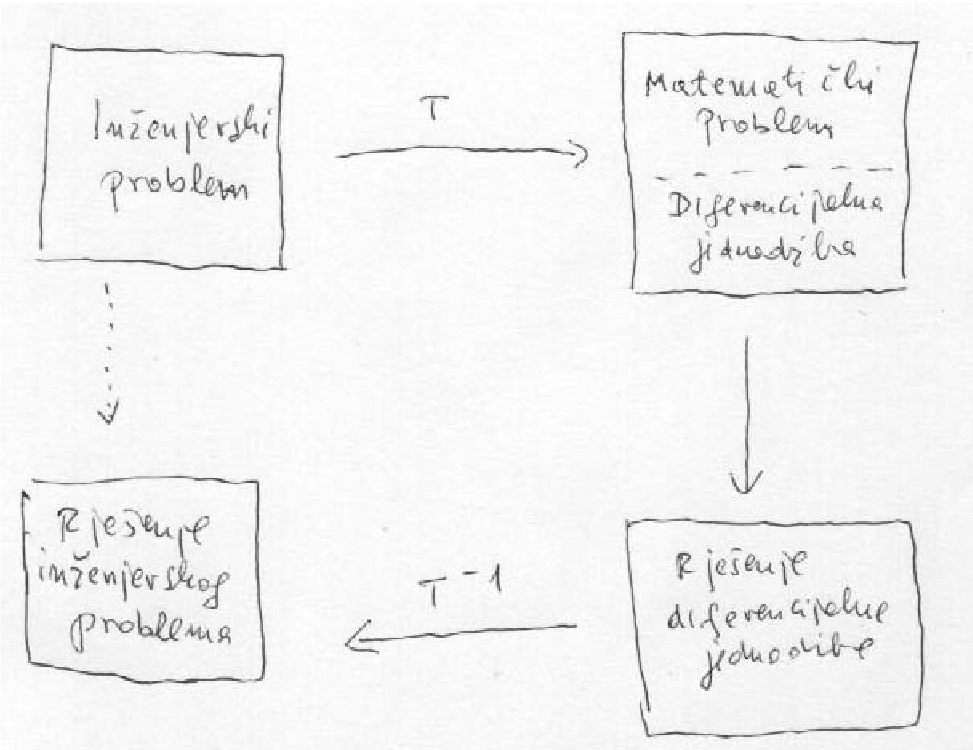
12. Obične diferencijalne jednadžbe 1.reda.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se sustavno rjeŽavaju obične linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda i komentira njihova uloga u primjenama. Posebno se podsjeća na diferencijalne jednadžbe koje smo obradjivali u 2. lekciji, koje su poseban slučaj ovih jednadžba:
1. jednadžbu radioaktivnog raspada.
2. jednadžbu hladjenja (odnosno zagrijavanja) tijela.
Pojam $diferencijalna$ naznačuje da je riječ o jednadžbi u kojoj se pojavljuje derivacija, pojam *obična* da je derivacija funkcije jedne varijable (za razliku od parecijalne), a 1.*reda* da se ne pojavljuju druge derivacije niti derivacije višeg reda.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Ako imamo dvije zavisne varijable, recimo x, y, onda je temeljni problem odredjivanje analitičke veze medju njima. U prirodnim znanostima i u inženjerstvu, tom se problemu pristupa eksperimentalno. Često se iz eksperimentalnih podataka ne može naslutiti izravna veza medju tim veličinama, ali se može naslutiti veza izmedju x, y i y' gdje je y' brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x, dakle $y' := \frac{dy}{dx}$. Na primjer, kao smo već vidjeli u 2. lekciji, eksperimentalno se dade naslutiti veza
$y' = -ky$,
gdje je t vrijeme, y količina radioaktivne materije (na primjer $(C-14)$) i $y' := \frac{dy}{dt}$ (tu je, umjesto x varijabla t).
Vidjeli smo kako se iz diferencijalne jednadžbe može odrediti količina radioaktivne materije $y(t)$ za svaki t (uz uvjet da znamo početnu količinu $y(0)$ i koeficijent k koji je karakteristika materije). Općenito, sve se odvija prema shemi iz sl.1.



Sl. 1.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam derivacije prvog reda i pojam neodredjenog integrala. Takodjer je potrebno poznavati fizikalnu interpretaciju prve derivacije kao brzine. Dakle, ako su dvije veličine x, y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x opisuje derivacijom $f'(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{df}{dx}$; što se se zapisuje kratko i kao y', odnosno $\frac{dy}{dx}$. Kraće:
Brzina $v(x)$ od y (s obzirom na x) $:= y'(x) = \frac{dy}{dx}$
(tu su navedene različite oznake).
Za razumijevanje te fizikalne interpretacije treba poznavati činjenicu da je $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Pojam obične diferencijalne jednadžbe 1. reda.
Pojam smo djelomično upoznali u 2. lekciji. Polazi se od dviju zavisnih veličina x, y i brzine od y s obzirom na x, tj. $y' := \frac{dy}{dx}$.
Umjesto x, y često se koriste oznake $t, y, y' := \frac{dy}{dt}$, ako gledamo promjenu veličine y u vremenu t (takodjer $t, x, x' := \frac{dx}{dt}$ i sl.).
Obična diferencijalna jednadžba 1.reda je analitička veza izmedju x, y i y'.

Primjer 1. - nekoliko običnih diferencijalnih jednadžba 1.reda.
(i) $y' = -ky$
(ii) $y' = -k(y - g(x))$
(iii) $g(y)y' = -k\sqrt{y}$
(iv) $\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$
(v) $y' - 3(x^2 + 1)y = e^x$.
(vi) $y'^2 y - x \sin y + e^{y'} = 0$.
(vii) $2yy' = 1$.
Napomenimo da je (i), ako je parametar k pozitivan, diferencijalna jednadžba raspada (ali i genetske mutacije), (ii) je tipa diferencijalne jednadžbe hladjenja, (iii) je tipa diferencijalne jednadžbe istjecanja tekućine, (iv) prirodnog rasta, a (v), (vi) i (vii) nemaju neko jasno fizikalno značenje.
Uočimo da se y' pojavljuje u svim jednadžbama, dok se y i x (odnosno t), ne moraju pojaviti.

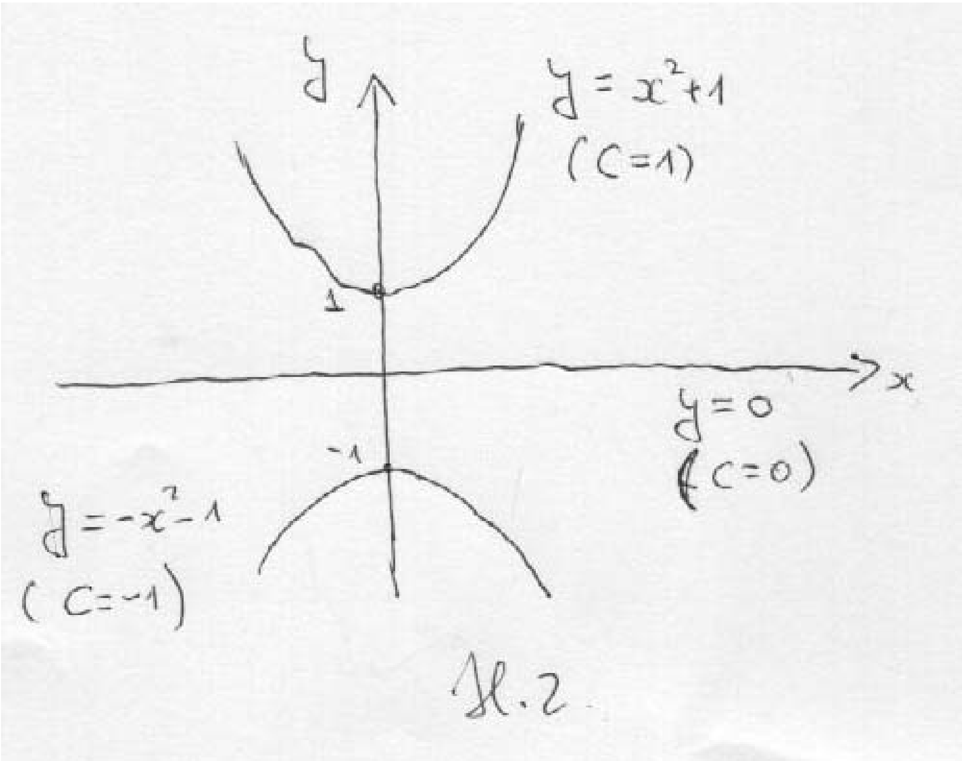
Riješiti diferencijalnu jednadžbu 1.reda znači iz jednadžbe eliminirati derivaciju y' tako da ostanu samo x i y (što nam i treba jer tražimo vezu izmedju njih).

Primjer 2. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $(x^2 + 1)y' - 2xy = 0$.
Rješenje provodimo tzv. metodom **separacije varijabla**, tj. odijelimo y i x.

1.korak. Uvodimo oznaku $y = \frac{dy}{dx}$:
$(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$.
2. korak. y stavljamo na lijevu stranu, a x na desnu.
$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2+1}dx$
3. korak. Integriramo posebno lijevu, a posebno desnu stranu:
$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2+1}dx$
$\ln|y| = \ln(x^2 + 1) + \ln C,\ C > 0$ (tu smo konstantu ovako zapisali, jer će nam tako konačni zapis biti skladniji).
Time je derivacija eliminirana i ovo možemo smatrati rješenjem, ali poželjno je rješenje pojednostavniti.
4. korak. Sredjivanje.
$\ln|y| = \ln[C(x^2 + 1)],\ C > 0$
$|y| = C(x^2 + 1),\ C > 0$
$y = \pm C(x^2 + 1),\ C > 0$
$y = C(x^2 + 1),\ C \in \mathbf{R}$ (tu smo $\pm C$ zamijenili s C, s tim da je sad C bilo koji realan broj; posebno smo uvrstili i $C = 0$ jer je $y = 0$ rješenje početne jednadžbe).
Rješenje

$$y = C(x^2 + 1),\ C \in \mathbf{R}$$

zovemo **općim rješenjem** jer se u njemu pojavljuje neodredjena konstanta C.
Partikularno rješenje je svako konkretno rješenje, tj rješenje u kojemu je specificirano C. Na primjer,
$y = 0$, $y = x^2 + 1$ i $y = -x^2 - 1$ su partikularna rješenja (dobiju se, redom, za $C = 0$, $C = 1$, $C = -1$) (sl.2.).



Cauchyev problem prvog reda. To je sustav diferencijalne jednadžbe prvog reda i početnog uvjeta, tj. vrijednosti veličine y za $x = 0$ ili za neku drugu konkretnu vrijednost veličine x:
$y(x_0) = y_0$.
Cauchyev problem ima **jedinstveno** rješenje. Naime, iz početnog uvjeta možemo odrediti konstantu C. To ćemo ilustrirati primjerom povezanim s predhodnim.

Primjer 3. Riješimo Cauchyev problem:
$(x^2 + 1)y' - 2xy = 0$.
$y(0) = 2$.
Vidjeli smo da je opće rješenje $y = C(x^2 + 1)$, $C \in \mathbf{R}$. Uvrštavajući početni uvjet, dobijemo:
$2 = C(0^2 + 1)$, dakle $C = 2$, pa je konačno rješenje $y = 2x^2 + 2$.

Obična linearna diferencijalna jednadžba 1. reda je takva jednadžba u kojoj se y' i y pojavljuju kao **linearne** funkcije odvojeno jedna od druge.
Na primjer, u 2. su primjeru (i), (ii), (iv) i (v) linearne, (iii) nije jer se pojavljuje $\sqrt{y}$, a (vi) nije iz više razloga (pojavljuje se $\sin y$, ali i $e^{y'}$ te y'^2).
Jednadžba (vii) nije linearna iako se, naizgled y, y' javljaju kao linearne. Naime, kad se razdvoje, dobije se $y' = \frac{1}{2y}$. Jednadžba u 2. primjeru je linearna. Dakle, pojam **linearan** odnosi se na y i y', ali ne na x.
Općenito, linearna diferencijalna jednadžba 1. reda može se zapisati kao:

$$y' - h(x)y = g(x)$$

gdje su h i g realne funkcije. Ako je g nula funkcija dobije se homogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda:

$$y' - h(x)y = 0$$

Na primjer, jednadžba iz 2. primjera je homogena. Ona se može napisati u ekvivalentnom obliku:
$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0$, pa je tu $h(x) := \frac{2x}{x^2+1}$.
Kako smo nju riješili (metodom separacije) tako možemo i bilo koju homogenu:
$\frac{dy}{y} = h(x)dx$
$y = Ce^{H(x)},\ C \in R$,
gdje je H neka primitivna funkcija funkcije h, tj. $H' = h$.

Rješenje nehomogene linearna diferencijalna jednadžba 1. reda $y' - h(x)y = g(x)$.
1. korak. Riješi se pripadna homogena jednadžba: $y' - h(x)y = 0$. Dobije se $y = Ce^{H(x)},\ C \in R$.
2. korak. Rješenje nehomogene se traži u obliku $y = C(x)e^{H(x)}$, dakle da se u rješenju homogene umjesto konstante c uvrsti funkcija $C(x)$.
Daljnji postupak objašnjavamo primjerom.

Primjer 4. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $(x^2+1)y' - 2xy = 2x(x^2+1)^2$.
Jednadžba se može zapisati kao:
$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 2x(x^2+1)$
1.korak Pripadna je homogena jednadžba $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0$, što je samo drukčije zapisana jednadžba iz 2. primjera. Zato joj je rješenje:
$y = C(x^2+1),\ C \in \mathbf{R}$.
2. korak. Rješenje nehomogene tražimo u obliku $y = C(x)(x^2+1)$.
Deriviranjem dobijemo: $y' = C'(x)(x^2+1) + 2xC(x)$.
Uvrštavanjem tih dviju relacija u nehomogenu jednadžbu dobijemo:
$C'(x)(x^2+1) + 2xC(x) - \frac{2x}{x^2+1} \cdot C(x)(x^2+1) = 2x(x^2+1)$, tj. $C'(x)(x^2+1) = 2x(x^2+1)$, tj. $C'(x) = 2x$, tj. $C(x) = x^2 + K,\ K \in \mathbf{R}$.
Uvrštavajući u $y = C(x)(x^2+1)$, dobijemo konačno rješenje:
$y = (x^2+K)(x^2+1),\ K \in \mathbf{R}$.
Izravna provjera pokazuje da je to zaista rješenje.